

Analisi Matematica I : I prova intermedia  
Corso:      OMARI      ☐      TIRONI      ☐  
A.a. 2003–2004.

COGNOME e NOME \_\_\_\_\_ N. Matricola \_\_\_\_\_

Anno di Corso \_\_\_\_\_ Laurea in Ingegneria \_\_\_\_\_

**ESERCIZIO N. 1.** Si determinino l’estremo inferiore e l’estremo superiore dei seguenti insiemi, specificando se sono, rispettivamente, il minimo e il massimo:

$$A = \left\{ 2 + \frac{1}{m} : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\},$$

$$B = \mathbb{N} \cup \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\},$$

$$C = ] - 1, 1[ \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} \in ] - 2, 2]\}.$$

$$\inf A = 1 \in A$$

$$\sup A = 3 \in A$$

$$\inf B = -1 \in B$$

$$\sup B = +\infty$$

$$\inf C = -1 \notin C$$

$$\sup C = \sqrt{2} \in C$$

$$\inf D = 0 \in D$$

$$\sup D = 4 \in D$$

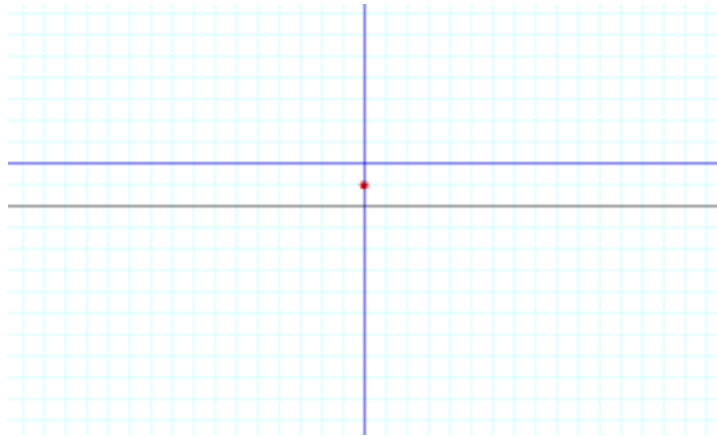
**ESERCIZIO N. 2.** Si determini e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme degli  $z \in \mathbb{C}$  tali che

$$\Re \left( \frac{3 + iz}{\bar{z} + i} \right) = 0,$$

dove  $\Re w$  e  $\bar{w}$  indicano rispettivamente la parte reale e il coniugato del numero complesso  $w$  e  $i$  è l'unità immaginaria.

### RISULTATO

$$S = \{x + iy \in \mathbb{C} : x = 0 \text{ o } y = 2\} \setminus \{i\}$$



### SVOLGIMENTO

Posto  $z = x + iy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ , si ha, per  $z \neq i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{3 + iz}{\bar{z} + i} &= \frac{3 + iz}{\bar{z} + i} \cdot \frac{z - i}{z - i} = \frac{iz^2 + 4z - 3i}{|z - i|^2} = \frac{i(x^2 - y^2 + 2ixy) + 4x + 4iy - 3i}{|z - i|^2} = \\ &= \frac{-2xy + 4x}{|z - i|^2} + i \frac{x^2 - y^2 + 4y - 3}{|z - i|^2}. \end{aligned}$$

Quindi, per  $z \neq i$ , risulta

$$\Re \left( \frac{3 + iz}{\bar{z} + i} \right) = \frac{-2xy + 4x}{|z - i|^2} = 0 \iff 2x(2 - y) = 0 \iff x = 0 \text{ o } y = 2.$$

COGNOME e NOME \_\_\_\_\_

**ESERCIZIO N. 3.** Sia

$$f(x) = \arcsin(1 + \log_5(1 - x)).$$

Si determinino

(i) il dominio di  $f$ :  $\text{dom} f = [0, \frac{24}{25}]$ .

Infatti, si ha

$$\begin{aligned} x \in \text{dom} f &\iff \begin{cases} 1 - x > 0 \\ |1 + \log_5(1 - x)| \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ -1 \leq 1 + \log_5(1 - x) \leq 1 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x < 1 \\ -2 \leq \log_5(1 - x) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ 5^{-2} \leq 1 - x \leq 5^0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x < 1 \\ 0 \leq x \leq 1 - 5^{-2} \end{cases} \iff 0 \leq x \leq \frac{24}{25}. \end{aligned}$$

(ii) i segni di  $f$ :  $f(x) > 0$  se  $x \in [0, \frac{4}{5}[$ ,  $f(\frac{4}{5}) = 0$  e  $f(x) < 0$  se  $x \in ]\frac{4}{5}, \frac{24}{25}]$ .

Infatti, se  $x \in \text{dom} f$ , si ha

$$\begin{aligned} f(x) = \arcsin(1 + \log_5(1 - x)) > 0 &\iff 1 + \log_5(1 - x) > 0 \iff \\ &\iff \log_5(1 - x) > -1 \iff 1 - x > 5^{-1} \iff x < \frac{4}{5} \end{aligned}$$

e

$$f(\frac{4}{5}) = 0.$$

(iii)  $f^{-1}(\{\frac{\pi}{6}\}) = \{x \in \text{dom} f : f(x) = \frac{\pi}{6}\} = \{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\}$

Infatti, se  $x \in \text{dom} f$ , si ha

$$\begin{aligned} f(x) = \arcsin(1 + \log_5(1 - x)) = \frac{\pi}{6} &\iff 1 + \log_5(1 - x) = \frac{1}{2} \iff \\ &\iff \log_5(1 - x) = -\frac{1}{2} \iff 1 - x = 5^{-\frac{1}{2}} \iff x = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Si provi la decrescenza di  $f$ .

Se  $x_1, x_2 \in \text{dom} f$ , si ha

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\implies 1 - x_1 > 1 - x_2 \implies 1 + \log_5(1 - x_1) > 1 + \log_5(1 - x_2) \implies \\ &\implies f(x_1) = \arcsin(1 + \log_5(1 - x_1)) > \arcsin(1 + \log_5(1 - x_2)) = f(x_2). \end{aligned}$$